Chapitre 14

Limite, continuité

Plan du chapitre

Hypothèse

- I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux.
- $\overline{I}$ est l'ensemble qui contient I ainsi que les extrémités de I, idem pour $\overline{J}$.

Exceptionnellement dans ce chapitre, si $\pm\infty$ est une borne de l'intervalle I, on inclura $\pm\infty$ dans $\overline{I}$.

Hypothèse

- D et D' sont des parties de $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme une réunion d'un ou plusieurs intervalles non triviaux, par exemple $D = \mathbb{R}^*$, $D = D_{\tan}$ ou encore $D = \left[-3,-2\right] \cup \mathbb{R}_+$.
- Enfin si on note I_1, I_2, etc. les intervalles qui constituent D, i.e. $D = I_1 \cup I_2 \cup \ldots$, alors on notera $\overline{D} = \overline{I_1} \cup \overline{I_2} \cup \ldots$ Idem pour $\overline{D'}$.

Exemple 1. Si $I = \left]0,+\infty\right[$, alors $\overline{I} =$ .... Si $D = D_{\tan}$, alors $\overline{D} =$ ....
Si f est une fonction définie sur I (resp. D), l'ensemble $\overline{I}$ (resp. $\overline{D}$) rassemble toutes les valeurs de a, finies ou infinies, en lequel une fonction f définie sur I est susceptible d'admettre une limite en a. Par exemple, si $I = \left]0,+\infty\right[$, alors $-1 \notin \overline{I}$: une fonction définie sur I ne pourra pas admettre de limite en -1 ! Par contre $0 \in \overline{I}$: une fonction définie sur I est susceptible de posséder une limite en 0.

1 Définition de la limite d'une fonction

1.1 Notion de voisinage

Rappel : soit $\mathfrak{P}$ une propriété susceptible d'être vérifiée ou non par une fonction. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $X \subset D$. On dit que <u>f vérifie $\mathfrak{P}$ sur X</u> si la restriction $f|_X$ vérifie la propriété $\mathfrak{P}$.

Par exemple $\mathfrak{P}$ peut être "est croissante" ou "est positive". Cependant, on fait une exception pour "est continue / dérivable" sur J qui signifie "la fonction est continue / dérivable *en chaque point* de J".

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction $x \mapsto \ln x$ est bornée sur $\left[1,2\right]$ mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 14.1

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D}$.

- ($a = +\infty$) f vérifie $\mathfrak{P}$ <u>au voisinage de $+\infty$</u> s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathfrak{P}$ sur $D \cap \left[A,+\infty\right[$.
- ($a = -\infty$) f vérifie $\mathfrak{P}$ <u>au voisinage de $-\infty$</u> s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathfrak{P}$ sur $D \cap \left]-\infty,A\right]$.
- (a fini) f vérifie $\mathfrak{P}$ <u>au voisinage de a</u> s'il existe $\delta > 0$ tel que f vérifie $\mathfrak{P}$ sur $D \cap \left[a-\delta,a+\delta\right]$.

Dire que f vérifie $\mathfrak{P}$ au voisinage de $a \in \overline{D}$ signifie grossièrement que f vérifie $\mathfrak{P}$ "lorsqu'on se place suffisamment proche de a".

Exemple 3. Montrer les assertions suivantes :

1. Pour tout $a \in \left]1,+\infty\right[$, ln est strictement positive au voisinage de a.
2. tan n'est pas croissante au voisinage de $+\infty$.

1.2 Définition de limite finie en $\pm\infty$

Rappel : soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a vu que $u_n \to \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

On considère à présent une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. La définition de $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ va s'inspirer largement de cela :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{pour } x \text{ assez grand}$$

Mais que signifie concrètement "pour x assez grand" ci-dessus ? Cela signifie qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D \cap \left[A, +\infty\right[$, la propriété sur $f(x)$ est vérifiée. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 14.2 – Limite ℓ finie en a infini

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$ (donc ℓ est fini).

- Si $+\infty \in \overline{D}$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ si :

- Si $-\infty \in \overline{D}$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$ si :

On emploie également la notation $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, voire même $\lim_{+\infty} f = \ell$.

Exemple 4. Montrer avec la définition de la limite que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$.

1.3 Définition de limite infinie en $\pm\infty$

Rappel : soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a vu que :

$$u_n \to +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \qquad u_n \geq B \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

$$u_n \to -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \qquad u_n \leq B \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

On considère à présent une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Les définition de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ vont également s'inspirer des définitions ci-dessus :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \qquad f(x) \geq B \quad \text{pour } x \text{ assez grand}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathbb{R} \qquad f(x) \leq B \quad \text{pour } x \text{ assez grand}$$

Là encore, on peut traduire “pour x assez grand” comme étant “il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D \cap \left[A, +\infty\right[$”, la propriété sur $f(x)$ est vérifiée. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 14.3 – Limite ℓ infinie en a infini

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si $+\infty \in \overline{D}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ si :

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad (x \geq A \implies f(x) \geq B)$$

- Si $+\infty \in \overline{D}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ si :

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad (x \geq A \implies f(x) \leq B)$$

- Si $-\infty \in \overline{D}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ si :

- Si $-\infty \in \overline{D}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ si :

On emploie également la notation $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, voire même $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Exemple 5. Montrer que $\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

1.4 Définition de limite finie en un réel a

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On s'intéresse maintenant à la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ lorsque a est un réel (donc n'est pas infini). Fondamentalement, cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{pour } x \text{ assez proche de } a$$

Mais que signifie "pour x assez proche de a" ci-dessus ? Cela veut dire qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D \cap \left[a - \delta, a + \delta\right]$, la propriété sur $f(x)$ est vérifiée. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 14.4 – Limite ℓ finie en a fini

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ avec a fini, et $\ell \in \mathbb{R}$ (donc ℓ est fini).

- On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si :

On emploie également la notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, voire même $\lim\limits_{a} f = \ell$.

Exemple 6. En utilisant la définition de la limite, montrer que $\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$.

1.5 Définition de limite infinie en un réel a

Définition 14.5 – Limite ℓ infinie en a fini

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$.

- On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ si :

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad (|x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq B)$$

- On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ si :

2 Propriétés des limites

2.1 Unicité de la limite et "bornitude" au voisinage d'une limite finie

Théorème 14.6

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. On fait la preuve uniquement lorsque a est fini.

□

On peut également mentionner le résultat suivant : si f admet une limite infinie en a, alors f n'est pas bornée au voisinage de a.

Théorème 14.7 – Unicité de la limite

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D}$. Pour tous $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, si

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$$

alors $\ell_1 = \ell_2$. Autrement dit **la** limite de f en a, si elle existe, est unique.

Cette proposition justifie, **lorsque la limite existe**, l'écriture "$\lim\limits_{x\to a} f(x)$" : cela ne correspond qu'à une seule et unique valeur (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Démonstration. On ne fait la preuve que pour le cas $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et a fini. Supposons par l'absurde que $\ell_1 \neq \ell_2$. On pose (après calcul au brouillon)

$$\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$$

Comme $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in D$

$$|x-a| \leq \delta_1 \implies |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon$$

De même, comme $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in D$

$$|x-a| \leq \delta_2 \implies |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in D$ tel que $|x-a| \leq \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2| \end{aligned}$$

Alors en divisant par $|\ell_1 - \ell_2| \neq 0$, on trouve $1 \leq \dfrac{2}{3}$. Contradiction. D'où $\ell_1 = \ell_2$. □

2.2 Limites et inégalités

Les théorèmes pour les suites ont leur équivalent pour les fonctions. La différence principale étant que la mention "à partir d'un certain rang" est en quelque sorte remplacée par "au voisinage de a", où a est le point de $\overline{D}$ en lequel on regarde la limite.

Théorème 14.8 – Passage à la limite dans une inégalité

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. Si $f \leq g$ au voisinage de a, et si f, g admettent des limites (éventuellement infinies) en a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

Remarque.

- Comme pour les suites, il est indispensable que f et g admettent des limites avant de passer à la limite.
- Attention, en passant à la limite les inégalités deviennent larges : si $f(x) < g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
- Il n'est pas nécessaire que $f \leq g$ soit vrai partout : il suffit que cela soit vrai au voisinage de a :
  - si a est fini, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $D \cap \left[a-\delta, a+\delta\right]$ avec $\delta > 0$.
  - Si $a = +\infty$, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $D \cap \left[A, +\infty\right[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
  - Si $a = -\infty$, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $D \cap \left]-\infty, A\right]$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Résultats d'existences de limites

Théorème 14.9 – Théorème d'encadrement

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $h : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. Soit $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f \leq g \leq h \qquad \text{au voisinage de } a$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, alors g admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Démonstration. On ne fait la démonstration que pour $a \in \mathbb{R}$ (donc fini).
Montrons que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. Par la caractérisation séquentielle de la limite (cf plus loin), il suffit de montrer que pour toute suite $(u_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to a$, on a $g(u_n) \to \ell$. Soit donc (u_n) une suite à valeurs dans D qui converge vers a. Montrons que, à partir d'un certain rang, on a

$$f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$$

Comme $f \leq g \leq h$ au voisinage de a, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D \cap \left[a-\delta, a+\delta\right] \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Or, en utilisant la définition de la limite de $u_n \to a$ (avec $\varepsilon = \delta > 0$), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - a| \leq \delta$, et donc $u_n \in D \cap \left[a-\delta, a+\delta\right]$. Ainsi,

$$\forall n \geq N \qquad f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$$

Or, par la caractérisation séquentielle,

$$\begin{cases} u_n \to a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{cases} \implies f(u_n) \to \ell \qquad \text{et de même} \qquad h(u_n) \to \ell$$

De plus, comme $f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$ à partir d'un certain rang, on en déduit par le théorème d'encadrement des suites que $g(u_n) \to \ell$. On a donc le résultat voulu. □

Comme pour les suites, le principal intérêt de ce théorème est de montrer que g admet une limite. Enfin, on dispose également d'un résultat d'encadrement "d'un seul côté" :

Théorème 14.10 – Encadrement d'un seul côté

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que $f \leq g$ au voisinage de a.

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Méthode – Limite par majoration

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ (donc fini). On souhaite montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. Si on trouve une fonction h telle que

$$|f(x) - \ell| \leq h(x) \quad \text{au voisinage de } a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 0$$

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

La preuve de cette méthode découle du théorème d'encadrement : on a en effet $0 \leq |f(x) - \ell| \leq h(x)$ et comme $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on en déduit que $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x\to a]{} 0$, d'où le résultat.

2.3 Opérations sur les limites

On rappelle que les formes indéterminées sont :

$$+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Limite d'une somme et d'un produit

Théorème 14.11 – Somme et produit de limites

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, **à condition que cela ne donne pas une forme indéterminée**,

$$f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell'$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda \ell$$

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$$

Démonstration. Montrons la propriété sur la limite de la somme et du produit dans le cas ℓ, ℓ' finis.

On va montrer que $\left|f(x)+g(x)-(\ell+\ell')\right| \xrightarrow[x\to a]{} 0$ par une majoration.

$$\left|f(x)+g(x)-\ell-\ell'\right| \leq |f(x)-\ell| + \left|g(x)-\ell'\right|$$

Or, $\lim\limits_{x\to a} |f(x)-\ell| = \lim\limits_{x\to a} \left|g(x)-\ell'\right| = 0$. On en déduit que $\left|f(x)+g(x)-\ell-\ell'\right| \xrightarrow[x\to a]{} 0$. D'où le résultat.

$\square$

Théorème 14.12

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{D}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et g est bornée au voisinage de a. Alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Démonstration. Pour tout $x \in D$, on a

$$|f(x)g(x) - 0| \leq |f(x)| \times |g(x)| = |f(x) - 0| \times |g(x)|$$

D'une part, on a $|f(x) - 0| \xrightarrow[x \to a]{} 0$. D'autre part, par hypothèse, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour x "assez proche de a", on a $|g(x)| \leq K$. Donc, au voisinage de a, on a

$$|f(x)g(x)| \leq K \times |f(x) - 0| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Par suite, $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. □

Limite de l'inverse et du quotient

On peut montrer que si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, alors $f(x) \neq 0$ au voisinage de a. Donc la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a.

Théorème 14.13 – Limite de l'inverse

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D}$.

1. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
3. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et $f(x) > 0$ au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$. (car $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0^+$)
4. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et $f(x) < 0$ au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$. (car $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0^-$)
5. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de a, mais que les cas 3 et 4 ne sont pas vérifiés, alors $\dfrac{1}{f}$ n'a pas de limite en a.

Un quotient de fonctions peut se réécrire : $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$. On peut ainsi déduire la limite de $\dfrac{f}{g}$ avec les théorèmes de limites ci-dessus.

Limite d'une composée

Théorème 14.14 – Composition de limites

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{D}$ et $b \in \overline{D'}$. On suppose $f(D) \subset D'$, de sorte que $g \circ f$ a un sens. Alors,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \implies \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$$

2.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 14.15 – Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(ii) Pour toute suite (u_n) à valeurs dans D, si $u_n \to a$, alors $f(u_n) \to \ell$.

Remarque. Si $a \in D$, on peut en particulier prendre $u_n = a$ (qui tend bien vers a). Dans ce cas, $f(u_n) = f(a)$ et la limite ℓ vaut nécessairement $f(a)$. Autrement dit :

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ a \in D \end{cases} \implies \ell = f(a)$$

Démonstration. On ne fait la preuve que pour le cas où a et ℓ sont finis.

$\square$

La caractérisation séquentielle est très utile pour montrer la *non-existence* d'une limite.

Méthode

Pour montrer que f n'admet pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs dans D qui tendent vers a mais de sorte que les expressions $f(u_n)$ et $f(v_n)$ n'ont pas la même limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 7. Montrer que $f : x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ n'a pas de limite en 0.

3 Limite à gauche, limite à droite

3.1 Définition

On définit une nouvelle notion de limite, qui ne s'applique qu'en des points a finis.

Définition 14.16 – Limite à gauche, limite à droite

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$ (donc a est fini).

- On suppose que l'ensemble $D \cap \left]-\infty, a\right[$ est non vide. Si la fonction
$$f\Big|_{D\cap\left]-\infty,a\right[}$$
admet une limite en a, on l'appelle la <u>limite à gauche de f en a</u>. On la note
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(a^-)$$

- On suppose que l'ensemble $D \cap \left]a, +\infty\right[$ est non vide. Si la fonction
$$f\Big|_{D\cap\left]a,+\infty\right[}$$
admet une limite en a, on l'appelle la <u>limite à droite de f en a</u>. On la note
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(a^+)$$

Sur un graphe, on peut déterminer la limite à gauche de f en a en ne conservant que la partie du graphe qui est *strictement à gauche* de a, et en déterminant la limite en a. Idem pour la limite à droite.

Exemple 8.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = \ldots$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor = \ldots$

Exemple 9. Si on pose $f : x \to \sqrt{x}$, alors $D = \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, cela n'a pas de sens de parler de limite à gauche en 0, et on ne peut pas écrire : "$\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$".

Remarque (*Limite à droite sur le bord gauche exclu*)**.** Lorsque $D = D \cap \left]a, +\infty\right[$, alors la limite à droite de f en a coïncide avec la limite "habituelle". Par exemple :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{puisque } D = \mathbb{R}_+^* = D \cap \left]0, +\infty\right[$$

Ainsi, si $D = D \cap \left]a, +\infty\right[$, on peut omettre de préciser "$\lim\limits_{x\to a^+}$" et juste mettre "$\lim\limits_{x\to a}$". Idem pour la limite à droite si $D = D \cap \left]-\infty, a\right[$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dots \qquad \text{puisque } D = \left]-1, 1\right[= D \cap \left]-\infty, 1\right[$$

Dans la remarque ci-dessus, il est très important que $a \notin D$.

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{vérifie } \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{mais } f \text{ n'a pas de limite en } 0$$

Justifions que f n'a pas de limite en 0.

De même, pour la limite à droite :

$$f : x \in \left]-1, -1\right] \mapsto \begin{cases} 421 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad \text{vérifie } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \dots \qquad \text{mais } f \text{ n'a pas de limite en } 0$$

Si on utilise les notations $f(a^+)$ et $f(a^-)$, il faut bien garder à l'esprit qu'il s'agit de limites. En particulier, il n'est pas nécessaire que f soit définie en a. On peut par exemple écrire $\ln(0^+) = -\infty$, bien que ln ne soit pas définie en 0.

Théorème 14.17 – Limite en $a \implies$ Limites à gauche et à droite en a

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$.
Si f admet une limite (finie ou non) en a, alors :

- f admet une limite à gauche en a, à condition que $D \cap \left]-\infty, a\right[$ soit non vide.
- f admet une limite à droite en a, à condition que $D \cap \left]a, +\infty\right[$ soit non vide.

De plus, lorsqu'elles existent, toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x)}_{\text{si } D\cap\left]a,+\infty\right[\neq\varnothing} = \underbrace{\lim_{x\to a^-} f(x)}_{\text{si } D\cap\left]-\infty,a\right[\neq\varnothing}$$

Autrement dit, admettre une limite en a entraine en particulier le fait d'admettre une limite à gauche et à droite en a, sous réserve de sens.

La réciproque du Théorème ci-dessus est fausse : une fonction peut admettre des limites à gauche et à droite en a (qui peuvent même être égales) sans pour autant que f admette une limite en a. Par exemple :

$$\lim_{x\to 0^+} \lfloor -x^2 \rfloor = \lim_{x\to 0^-} \lfloor -x^2 \rfloor = -1 \qquad \text{mais} \qquad x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor \quad \text{n'a pas de limite en zéro.}$$

On renvoie à Exemple 7 pour plus de détails.

3.2 Théorème de la limite monotone (fonctions)

Théorème 14.18 – Théorème de la limite monotone

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit $f : \left]a, b\right[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors

1. f admet des limites (éventuellement infinies) en a et b, càd les limites suivantes existent (et peuvent être finies ou infinies) :
$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \lim_{x\to b} f(x)$$
2. Pour tout $c \in \left]a, b\right[$, f admet des limites ***finies*** à gauche et à droite en c. De plus,
$$\begin{aligned} \lim_{x\to c^-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c^+} f(x) \qquad & \text{si } f \text{ est croissante} \\ \lim_{x\to c^-} f(x) \ge f(c) \ge \lim_{x\to c^+} f(x) \qquad & \text{si } f \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Démonstration. On ne fait la démonstration que dans le cas f croissante. Pour le premier point, on montre uniquement que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (l'autre moitié se montre en adaptant la preuve).

Montrons l'assertion 1. On pose $J = f\left(\left]a, b\right[\right)$. On raisonne par disjonction de cas :

-

- Supposons J non majoré. Montrons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, càd

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \left]a, b\right[\qquad |x - a| \leq \delta \implies f(x) \leq A$$

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \left]a, b\right[\qquad x \leq \delta + a \implies f(x) \leq A$$

Soit $A \in \mathbb{R}$. J étant non majoré, il existe $y \in J$ tel que $y \leq A$. Or, par définition de J, il existe $x_0 \in \left]a, b\right[$ tel que $f(x_0) = y$. On pose $\delta = x_0 - a > 0$. Soit $x \in \left]a, b\right[$. On suppose $x \leq a + \delta$ donc $x \leq x_0$. Alors par croissance de f, on obtient :

$$f(x) \leq f(x_0) = y \leq A$$

Ainsi, par arbitraire sur A, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

□

4 Continuité en un point

La notion de continuité d'une fonction f en un point a se définit à partir de la notion de limite. Toutefois, il faut que a soit ***fini***, et d'autre part que f soit ***définie*** en a. Ainsi, pour une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, on ne peut parler de continuité qu'en un point $a \in D$.

4.1 Introduction

Définition 14.19 – Continuité en un point

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- On dit que f est continue en a si

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

càd

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \qquad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

- Sinon, on dit que f est discontinue en a.

Exemple 10. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 14.20 – Admettre une limite en un point de D entraine la continuité en ce point

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $\boxed{a \in D}$. Si f admet une limite en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Cela découle de la remarque sous la caractérisation séquentielle de la limite, cf Théorème 14.15, puisqu'alors on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell = f(a)$. □

Théorème 14.21 – Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue en a.
- Pour toute suite (u_n) à valeurs dans D, si $u_n \to a$, alors $f(u_n) \to f(a)$.

A nouveau, cette caractérisation permet surtout de montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

Exemple 11. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

4.2 Continuité à droite, à gauche

Définition 14.22 – Continuité à gauche, à droite

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- On dit que f est continue à gauche en a si :
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$
- On dit que f est continue à droite en a si :
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Pour que f soit continue à gauche en a, il faut en particulier que la limite $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ a un sens, et donc que $D \cap \left]-\infty, a\right[$ soit non vide. De même, pour que f soit continue à droite en a, il faut nécessairement que $D \cap \left]a, +\infty\right[$ soit non vide.

Exemple 12. Vrai ou faux ?

1. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 0.
2. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à gauche en 0.
3. La fonction $f : x \mapsto \tan x$ est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

Théorème 14.23

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche ET à droite en a.

Contrairement aux limites, il est donc suffisant d'être continue à gauche et à droite en a pour être continue en a.

4.3 Continuité sur un intervalle

Définition 14.24

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue (sur D) si f est continue en tout point de D.
On note $\mathscr{C}(D, \mathbb{R})$, ou parfois juste $\mathscr{C}(D)$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur D.

Remarque. Si f est continue sur D et si $X \subset D$, alors f est continue sur X.

Exemple 13. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 14. La fonction tan est continue sur $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

⚠ Pour toute partie $X \subset D$, l'assertion "f est continue sur X" ne signifie pas la même chose que "$f\big|_X$ est continue", cf exemple suivant.

Exemple 15. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue (sur $\mathbb{R}$) car elle n'est pas continue en 0. En particulier, elle n'est continue ni sur $\mathbb{R}_-$, ni sur $\mathbb{R}_+$.
Cependant, la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est continue (sur $\mathbb{R}_+$), car $f|_{\mathbb{R}_+}$ est la fonction constante égale à 1.

⚠ Certains auteurs prennent une convention différente, et disent que f est continue sur X revient à dire que $f|_X$ est continue... Cette convention peut être assez contre-intuitive : avec la fonction f ci-dessus, on pourrait dire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais on ne pourrait pas dire que f est continue en 0 !

Théorème 14.25

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\left]a, b\right[$ un intervalle **ouvert** inclus dans D. Alors f est continue sur $\left]a, b\right[$ si et seulement si $f\big|_{\left]a,b\right[}$ est continue.

Exemple 16. Voir la section 4.4 pour un exemple.

4.4 Opérations et continuité

Théorème 14.26 – Somme, produit, inverse et continuité

Soit $a \in D$. La somme, la différence, la multiplication par un réel λ, le produit, le quotient (à condition qu'il soit défini) de fonctions continues en a (resp. sur D) est encore une fonction continue en a (resp. sur D).

Théorème 14.27 – Composition et continuité

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose $f(D) \subset D'$, de sorte que $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ ait un sens. Si :

1. f est continue en a (resp. sur D).
2. g est continue en $f(a)$ (resp. sur D').

Alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur D).

Exemple 17. Montrer la continuité de $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$.

5 Prolongement par continuité

5.1 Définition d'un prolongement

Dans cette section, on va supposer que $a \in D$ et considérer une fonction f définie sur $D \setminus \{a\}$. L'objectif de cette section est de savoir sous quelles conditions on peut prolonger f par continuité au point a, cf définition ci-dessous.

Définition 14.28 – Prolongement par continuité

Soit $a \in D$ et $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (sur $D \setminus \{a\}$). On dit que f est prolongeable par continuité en a s'il existe une application $\widetilde{f}$ définie et **continue** sur D qui prolonge f.

La fonction $\widetilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.

Autrement dit, cela veut dire qu'il existe un réel y_a tel que l'application suivante soit **continue** :

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \setminus \{a\} \\ y_a & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque. Il arrive fréquemment qu'un énoncé garde la notation f pour désigner l'application $\widetilde{f}$.

Exemple 18. La fonction $f : x \mapsto x \ln x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $\widetilde{f}(0) = 1$

Exemple 19. Cependant, on "voit" que la fonction "signe" $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ne peut pas être prolongée par continuité en 0. Aucune valeur y_0 qu'on utiliserait pour définir $f(0)$ ne permet de rendre f continue sur $\mathbb{R}$.

5.2 Théorème de prolongement

Théorème 14.29 – Prolongement par continuité

Soit $a \in D$ et $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet en a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, ce prolongement est unique et correspond à l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour prolonger une fonction continue f en un point a, il suffit de déterminer la limite $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Théorème 14.30

Soit $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La fonction f admet une limite en a
- f admet une limite à gauche en a (si cela a un sens) ET f admet une limite à droite en a (si cela a un sens) ET $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ si les deux limites ont un sens.

De plus, lorsque ces assertions sont vérifiées, toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to a^-} f(x)}_{\text{si cela a un sens}} = \underbrace{\lim_{x \to a^+} f(x)}_{\text{si cela a un sens}}$$

Ce théorème n'est valide que lorsque f n'est pas définie en a ! Lorsque f est définie en a, on a seulement le Théorème 14.17, qui lui n'admet pas de réciproque.

Exemple 20. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^x \end{aligned}$$

est prolongeable par continuité en 0.

Exemple 21. Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\tan(2x)}{x} - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de $f(0)$.

6 Les grands théorèmes de la continuité

6.1 Le TVI et ses conséquences

Théorème 14.31 – TVI : Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$). Toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ admet (au moins) un antécédent par f dans $[a,b]$.

Autrement dit, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration.

$\square$

On rappelle que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial

Corollaire 14.32 – Corollaire du TVI

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors f est injective.

Autrement dit, si f vérifie les hypothèses, pour tous $a, b \in I$ avec $a < b$, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *un unique* $x \in \left[a, b\right]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration. Admise (non exigible). $\square$

Exemple 22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif x_n tel que $x_n^4 + 4x_n - n = 0$.

Corollaire 14.33

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrons que $f(I)$ est un intervalle. Soit $y_1, y_2 \in f(I)$. Il suffit de montrer que $\left[y_1, y_2\right] \subset f(I)$. Soit $y \in \left[y_1, y_2\right]$. Comme $y_1, y_2 \in f(I)$, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Comme I est un intervalle, on a nécessairement $\left[x_1, x_2\right] \subset I$. On peut donc affirmer que f est une fonction continue sur $\left[x_1, x_2\right]$. Par le TVI, comme y est compris entre y_1 et y_2, il existe $x \in \left[x_1, x_2\right]$ tel que $y = f(x)$. En définitive, on a montré que pour tout $y \in \left[y_1, y_2\right]$, il existe un x dans $\left[x_1, x_2\right]$, donc en particulier dans I, pour lequel $y = f(x)$. Ceci montre que $y \in f(I)$. Par arbitraire sur y, on en conclut que $\left[y_1, y_2\right] \subset f(I)$, donc que f est un intervalle. □

Corollaire 14.34

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur I, alors f a le même signe (strict) sur I.

6.2 Théorème de la bijection monotone

Théorème 14.35

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Démonstration. Admise (non exigible). □

Théorème 14.36 – Théorème de la bijection monotone

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$
3. $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et a la même monotonie (stricte) que f.

Démonstration. Admise (non exigible). On notera que le premier point s'obtient par le corollaire 14.33, et le second du corollaire 14.32 ajouté au fait que $f : I \to f(I)$ est nécessairement surjective. □

6.3 Théorème des bornes atteintes et ses conséquences

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. On rappelle que *lorsque cela a un sens*, on note :

$$\max_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \max\left\{f(x) \mid x \in \left[a,b\right]\right\} \qquad \min_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \min\left\{f(x) \mid x \in \left[a,b\right]\right\}$$

Définition 14.37

On dit qu'une fonction $f : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$ atteint ses bornes lorsqu'il existe $c, d \in \left[a,b\right]$ tels que $f(c) = \max_{x \in \left[a,b\right]} f(x)$ et $f(d) = \min_{x \in \left[a,b\right]} f(x)$

Théorème 14.38 – Théorème des bornes atteintes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration.

□

Corollaire 14.39

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors l'image par f du segment $[a,b]$ est un segment :

$$f\left([a,b]\right) = [m,M] \qquad \text{avec} \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Démonstration. Par définition, $m = \min f\left([a,b]\right)$ et $M = \max f\left([a,b]\right)$. Donc tout élément $y \in f\left([a,b]\right)$ vérifie $m \leq y \leq M$ de sorte que $f\left([a,b]\right) \subset [m,M]$.

Ensuite, comme $f\left([a,b]\right)$ est un intervalle et que $m,M \in f\left([a,b]\right)$, on en déduit par définition d'un intervalle que $[m,M] \subset f\left([a,b]\right)$. Finalement, $f\left([a,b]\right) = [m,M]$. □

7 Fonctions complexes

La notion de limite s'étend facilement aux fonctions $f : D \to \mathbb{C}$. Il suffit de remplacer la valeur absolue par le module. Avantage des fonctions complexes : la notion de limite infinie n'a pas de sens ! Donc il suffit de définir la notion de limite finie (i.e. dans $\mathbb{C}$).

Définition 14.40 – Limite (finie) d'une fonction complexe

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que <u>$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a</u> si $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x\to a]{} 0$:

- Si a est fini :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad (|x-a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$
- Si $a = +\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$
- Si $a = -\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad (x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note à nouveau $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Définition 14.41 – Continuité

Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On suppose que $a \in D$. On dit que f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est <u>continue sur D</u> si f est continue en chaque point de D.

Remarque. Topo rapide sur ce qui est conservé (ou pas) avec des fonctions complexes :

- L'unicité de la limite (finie) est là encore garantie.
- Attention : il n'y a pas de notion de limite infinie : une fonction complexe ne peut pas "tendre vers $\pm\infty$".
- Les caractérisations séquentielles (limite et continuité) sont valables, avec le même énoncé.
- Les sommes, produits, inverses et quotients sur les limites et la continuité restent vraies. Pour la composée $g \circ f$, les hypothèses sont $f : D \to \boxed{\mathbb{R}}$ et $g : D' \to \mathbb{C}$ et bien sûr $f(D) \subset D'$. La fonction f est donc réelle, seule g est une fonction complexe.
- Aucun des "grands théorèmes sur la continuité" (section 4.4) n'est valable pour une fonction complexe.

Théorème 14.42

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction.

- f admet une limite (finie) en a si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ admettent des limites finies en a, et dans ce cas
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \mathrm{Re}(f(x)) + i \lim_{x\to a} \mathrm{Im}(f(x))$$
- f est continue en a (resp. sur D) si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont continues en a (resp. sur D).

8 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour calculer la limite de f en a, on peut :

- Faire des opérations sur les limites (notamment la composition, croissances comparées, etc.)
- Utiliser des théorèmes d'encadrement.
- Si a est fini et $a \notin D_f$, calculer les limites à gauche et à droite en a et vérifier qu'elles sont égales.
- Si on connait la limite ℓ attendue, et que ℓ est finie, majorer $|f(x) - \ell|$ par une expression qui tend vers 0 quand x tend vers a.
- Utiliser la définition.

La méthode ci-dessus peut notamment s'adapter pour montrer la continuité de f en a.

Méthode

Pour montrer que f est discontinue en a, on peut :

- Trouver une suite (x_n) qui tend vers a, alors que $f(x_n)$ ne tend pas vers a.
- Trouver une limite à gauche et une limite à droite différentes, voire inexistantes.
- Nier la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

Méthode

Pour justifier l'existence et/ou l'unicité d'un x tel que $f(x) = y$ pour un certain réel y, on peut utiliser le TVI et/ou son corollaire.

Méthode

Pour justifier qu'une fonction admet un maximum et/ou un minimum, on peut utiliser le théorème des bornes atteintes.